2026年全国一卷数学卷高考真题带答案带解析文字版

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.样本数据6,8,4,5,12的中位数为

A.5

B.6

C.8

D.9

【答案】B

【解析】本题考查了中位数的计算,属基础题.把数据从小到大排列4,5,6,8,12,共5个数,中间的数为第3个6∴中位数为6.故选B.

2.已知平面向量a, b不共线,且$2a+yb=xa-3b$,则

A.$x=2$, $y=-3$

B.$x=-2$, $y=3$

C.$x=2$, $y=3$

D.$x=-2$, $y=-3$

【答案】A

【解析】本题考查了平面向量基本定理,属基础题.∵$\vec{a}$, $\vec{b}$不共线,可以作为平面内所有向量的一组基底,根据唯一性,可知$x=2$, $y=-3$.故选A.

3.已知集合$A=\left\{\sin\frac{7\pi}{6},\cos\frac{5\pi}{3},\tan\frac{5\pi}{4}\right\}$, $B=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right\}$,则$A\cap B=$

A.$\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

B.$\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right\}$

C.$\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$

D. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\right\}$

【答案】C

【解析】本题考查集合交集的运算,涉及到诱导公式求值.

$\because \sin\frac{7\pi}{6}=\sin(\pi+\frac{\pi}{6})=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan(\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$

$\because A=\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}$, $B=\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1\}$ $\therefore A\cap B=\{-\frac{1}{2},1\}$

故选:C.

4.曲线$y=5x+8\ln x$在点$(1,5)$处的切线方程为

A. $y=3x+2$

B. $y=5x$

C. $y=8x-3$

D. $y=13x-8$

【答案】D

【解析】本题考查了导数的几何意义.

$y'=5+\frac{8}{x}\therefore y'|_{x=1}=5+8=13$ $\therefore$切线的斜率为13

$\therefore$切线方程:$y-5=13(x-1)$,即$y=13x-8$.故选:D.

5.已知抛物线$C_1:y^2=2p_1x(p_1>0)$和$C_2:x^2=2p_2y(p_2>0)$均经过点$(4,8)$,则C_1的焦点与C_2的焦点之间的距离为

A. 12

B. $4\sqrt{5}$

C. 6

D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

【答案】D

【解析】本题考查抛物线的标准方程,焦点坐标,两点间距离公式.

把$(4,8)$代入C_1得$64=2p_1\times 4$,$\therefore p_1=8$,$\therefore C_1:y^2=16x$

把$(4,8)$代入C_2得$16=2p_2\times 8$,$\therefore p_2=1$,$\therefore C_2:x^2=2y$

$\therefore C_1$的焦点$(4,0)$,C_2的焦点$(0,\dfrac{1}{2})$

两焦点的距离为$\sqrt{(4-0)^2+(0-\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{65}}{2}$

故选:D

6.已知函数$f(x)=\dfrac{x+2}{e^{x+a}}$的最大值为1,则$a=$

A.$\dfrac{1}{2}$

B.1

C.$\dfrac{3}{2}$

D.2

【答案】B

【解析】本题考查利用导数求函数的最值问题.

$\because f(x)=\frac{x+2}{e^{x+a}}$

$\therefore f'(x)=\frac{e^{x+a}-(x+2)e^{x+a}}{(e^{x+a})^2}=\frac{-x-1}{e^{x+a}}$

当$x<-1$时,$f'(x)>0$,$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)$单调递增;

当$x>-1$时,$f'(x)<0$,$\therefore f(x)$在$(-1,+\infty)$单调递减.

$\therefore f(x)$在$x=-1$处取最大值,

即$f(-1)=1$,

$\therefore \frac{1}{e^{-1+a}}=1\Longrightarrow a=1$

故选:B.

7.一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市,以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩.该塔群共有108座塔,依山势自上而下排成12行,将第i行中塔的座数记为$a_i(i=1,2,\cdots,12)$,其中$a_1=1$,$a_2=a_3=3$,$a_4=a_5=5$,且a_6,a_7,...,a_{12}是一个首项为7,公差为2的等差数列.将a_1,a_2,...,a_{12}分为6组,每组2个数.使得每组的2个数之和可构成一个项数为6且公差为$d(d>0)$的等差数列.则$d=$

A.2

B.4

C.6

D.8

【答案】B

【解析】本题考查等差数列的应用

∵$a_6,a_7,\cdots a_{12}$是首项为7、公差为2的等差数列

∴可知12行塔数分别为1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19

其总和为108.

若配6对,且6个和构成公差为d(d>0)的等差数列.

不妨设该数列的首项为m,∴$6+\frac{6\times5}{2}d=108$

即2m+5d=36

由选项可知,d为正整数,∴只有m=8,d=4符合题意

此时,(1,7)=8,(3,9)=12,(3,13)=16,(5,15)=20,

(5,19)=24,(11,17)=28,符合题意,公差为4.

故选:B

8.设$U=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in\{-2,-1,1,2\},i=1,2,3\}$为空间中64个点构成的集合.点$P(1,1,1)$,记样本空间$\Omega=\complement_U\{P\}$.从$\Omega$中随机取一个点.定义随机变量X如下:对$\Omega$中的每个点$A(x_1,x_2,x_3)$,令$X(A)=x_1+x_2+x_3$.则X的数学期望为

A.$-\frac{1}{21}$

B.$-\frac{1}{63}$

C. 0

D. $\frac{1}{7}$

【答案】A

【解析】本题考查了离散型随机变量的数学期望.

由题意可知,U中每维取$\{-2,-1,1,2\}$各 16 次,

每维总和为 0,所以 64 点总和为 0,

剔除$P(1,1,1)$后,Ω中 63 点的X总和为-3.

$\therefore E(X)=-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$

故选:A.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。

9. 设$z=3+2\mathrm{i}$, 则

A. $\overline{z}=3-2\mathrm{i}$

B. $|z|=5$

C. $z^2=5+12\mathrm{i}$

D. $\frac{z+3}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$

【答案】ACD

【解析】本题考查了复数的计算,共轭复数,复数的模.

已知$z=3+2i$.

A:$\therefore\overline{z}=3-2i$. $\therefore$A 正确；

B:$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$. B 错误；

C:$z^2=(3+2i)^2=9+12i-4=5+12i$. C 正确；

D:$\frac{z+3}{z-i}=\frac{3+2i+3}{3+2i-i}=\frac{6+2i}{3+i}=\frac{(6+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{20}{10}=2\in R$. 故 D 正确.

10. 在空间中, A, B为两个定点, 动点C到直线AB的距离为 2, 动点D到直线AB

的距离为 1. 若二面角$C-AB-D$为$60°$, 则

A. $\angle CAD\geqslant 60°$

B. $CD\geqslant\sqrt{3}$

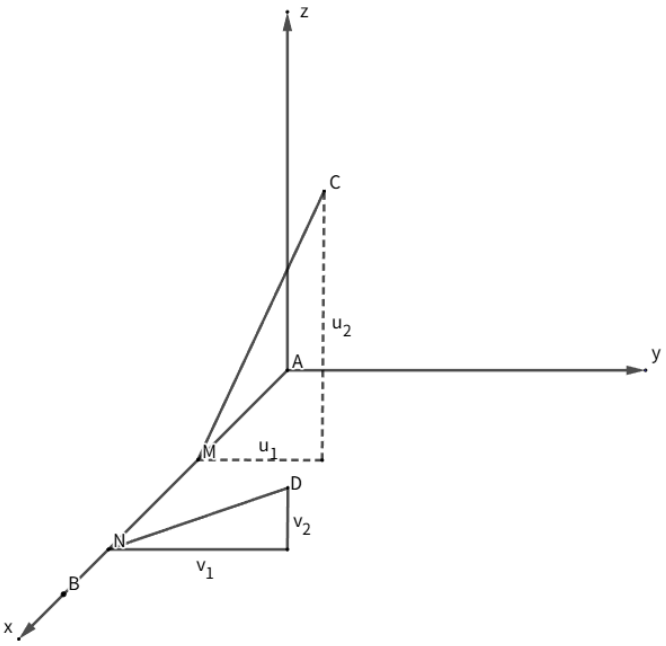
C. 当$AB\perp CD$时, $CD\perp$平面ABD

D. 当$AB\perp$平面ACD时, $AC\perp AD$

【答案】BC

【解析】本题考查了立体几何二面角、线面垂直、线线垂直的判定以及空间向量的应用, 距离等性质, 属于难题.

以 A 为原点建立空间直角坐标系如图



设$A(0,0,0)$

$C(x_1,u_1,u_2)$

$D(x_2,v_1,v_2)$

则$u_1^2+u_2^2=4$

$v_1^2+v_2^2=1$

A: 取$x_1=x_2=t$, 则

$$\cos\angle CAD=\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+4}\sqrt{t^2+1}}=\sqrt{\frac{t^2+1}{t^2+4}}=\sqrt{\frac{t^2+4-3}{t^2+4}}=\sqrt{1-\frac{3}{t^2+4}}\to 1$$

$\therefore\angle CAD$可以小于$60°$, 故 A 错误.

B:$CD^2=(x_1-x_2)^2+(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2=(x_1-x_2)^2+4+1-2=(x_1-x_2)^2+3\geqslant 3$

$\therefore CD\geqslant\sqrt{3}$,B 正确.

C:若$AB\perp CD$,则$x_1=x_2$.此时直线CD与AB的方向向量的数量积为:

$(0,v_1-u_1,v_2-u_2)\cdot(x_1,v_1,v_2)=(v_1^2+v_2^2)-(u_1v_1+u_2v_2)=1-1=0$

$\therefore CD\perp AB$,$\therefore CD\perp$面ABD,故 C 正确.

D:若$AB\perp$平面ACD,则$x_1=x_2=0$.此时:

$(0,u_1,u_2)\cdot(0,v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2=1\neq 0$

$\therefore AC\perp AD$不成立,故 D 错误.

故选BC.

11.已知圆$C_1:(x+1)^2+y^2=1$,圆$C_2:(x-1)^2+y^2=1$,圆$C_3:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$,直线$l:y=kx+b$与C_1,C_2,C_3均有两个交点.记l被C_1,C_2,C_3截得的弦长分别为s_1,s_2,s_3,则

A.k可以取任意实数

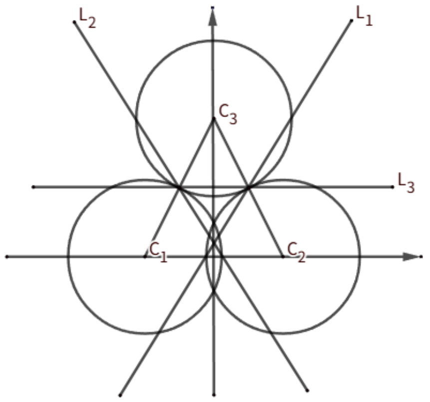
B.满足$s_1=s_2=s_3$的直线共有 3 条

C.满足$s_1+s_2+s_3=3$的直线 1 多于 3 条

D.当$b=0$时,$s_1+s_2+s_3$的最大值为$\frac{2\sqrt{21}}{3}$

【答案】BCD

【解析】本题考查了圆与圆的位置关系、直线与圆的位置关系,圆中的弦长问题及最值问题.



$C_1(-1,0)$, $C_2(1,0)$, $C_3(0,\sqrt{3})$

$\therefore C_1C_2=2$

$C_1C_3=C_2C_3=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

∴三个圆两两外切.

$\because L: kx-y+b=0$

C_1到L的距离为$d_1=\dfrac{|b-k|}{\sqrt{1+k^2}}$

C_2到L的距离为$d_2=\dfrac{|b+k|}{\sqrt{1+k^2}}$

C_3到L的距离为$d_3=\dfrac{|b-\sqrt{3}|}{\sqrt{1+k^2}}$

令$q=\sqrt{1+k^2}$, 则

$d_1=\dfrac{|b-k|}{q}$,

$d_2=\dfrac{|b+k|}{q}$,

$d_3=\dfrac{|b-\sqrt{3}|}{q}$.

$\therefore S_i=2\sqrt{r^2-d_i^2}\ (i=1,2,3)\ |d_i|<1$

$\therefore S_i=2\sqrt{1-d_i^2}$

A:若$k=-\frac{1}{\sqrt{3}}$,则$q=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$；由$|b-k|<q$得$b<\frac{1}{\sqrt{3}}$,

由$|b-\sqrt{3}|<q$得$b>\frac{1}{\sqrt{3}}$,矛盾,故 A 错误.

B:由$S_1=S_2=S_3$,得$|b-k|=|b+k|=|b-\sqrt{3}|$,先由$|b-k|=|b+k|$,得

$b=0$或$k=0$,若$k=0$,则$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$.若$b=0$则$k=\pm\sqrt{3}$.∴三条直线满足割线条件,故 B 正确.故 A 错误.

C:取$b=0$,记$u=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,则$s_1+s_2+s_3=4u+2\sqrt{1-3u^2}$.

令$s_1+s_2+s_3=3$得.$4u+2\sqrt{1-3u^2}=3$.

平方得.$28u^2-24u^2+5=0$.

解得$u=\frac{1}{2}$或$u=\frac{5}{14}$

对应$k=\pm\sqrt{3}$或$k=\pm\frac{\sqrt{171}}{5}$则有四条直线,故 C 正确.

D:当$b=0$时.仍有$s_1+s_2+s_3=4u+2\sqrt{1-3u^2}$.$0<u<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

令$v=\sqrt{1-3u^2}$.则$3u^2+v^2=1$由柯西不等式:$S^2\le(\frac{16}{3}+4)(3u^2+v^2)=\frac{28}{3}$.

当$u=\frac{2}{\sqrt{21}}$时取等号、$\therefore S_{max}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$∴D 正确.

故选 BCD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12.双曲线$5x^2-6y^2=1$的离心率为______.

【答案】$\frac{\sqrt{66}}{6}$

【解析】本题考查了双曲线的标准方程、求离心率.

已知双曲线方程为$5x^2-6y^2=1$

将方程化为标准方程$\frac{x^2}{\frac{1}{5}}-\frac{y^2}{\frac{1}{6}}=1$

可得$a^2=\frac{1}{5}, b^2=\frac{1}{6}, c^2=a^2+b^2=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$

$\therefore c=\sqrt{\frac{11}{30}}, \because e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{\frac{11}{36}}}{\sqrt{\frac{1}{5}}}=\sqrt{\frac{11}{6}}=\frac{\sqrt{66}}{6}$.

13. 已知$f(x)=2\sin(ax+\theta)(a\in Z, 0\leqslant\theta<2\pi)$是偶函数, $f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$单调递增. 则$\theta=$______, $f(\frac{2\pi}{3})=$______.

【答案】$\frac{3\pi}{2}$，1

【解析】本题考查了三角函数的单调性. 三角函数的奇偶性.

因为 f(x)为偶函数.

f(x)=2sin(ax+θ)(a∈Z, 0⩽θ<2π)

$\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z, \therefore 0\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2}<2\pi$.

$\therefore -\frac{\pi}{2}\leqslant k\pi<\frac{3\pi}{2}$

$-\frac{1}{2}\leqslant k<\frac{3}{2}$. $\because k\in Z$.

$\therefore k=0$或$k=1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{2}$或$\theta=\frac{3\pi}{2}$

$\because f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增, 当$\theta=\frac{\pi}{2}$时, $f(x)=2\cos ax$, 不满足单增(舍)

当$\theta=\frac{3\pi}{2}$时, $f(x)=-2\cos ax$, 此时$f'(x)=2a\sin ax$要在$(0,\frac{\pi}{2})$

内恒为正, 需$|a|=1$或$|a|=2$, 于是$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{2\pi a}{3}=1$

14. 设实数q满足: 存在数列$\{a_n\}$, 使得对于任意$n\in N^*$, 均有均有

$a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+n$, 且$\{a_n\}$中有某连续 9 项$a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$是公比为$q$的等比数列. 则$q$的最大值为______.

【答案】$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

【解析】本本题考查了数列的性质及等比数列的应用

由题意知:9 个连续位置至少含两个相邻的完整三项块,它们在等比九项中相隔 3 项,所以相邻完整块和之比就是q^3;若含有三个完整块,则$2m, 2(m+1), 2(m+2)$不成等比,排除.

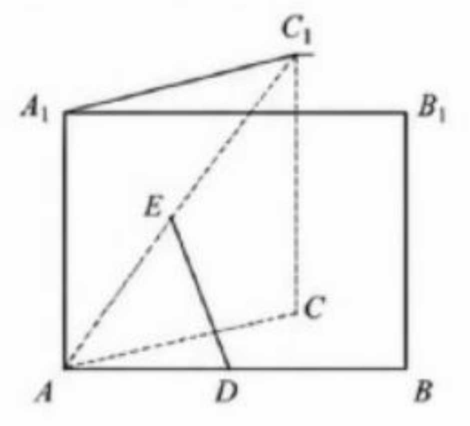
能放进窗口的最早相邻完整块是B_2, B_3,和为 4、6,

故$q^3 \le \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$,第二到第十项成等比,令$B_2 = 4, B_3 = 6$

可取等号,故最大值为$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.故填$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$\angle ACB = 90°$,$AC = BC$,且D、E分别为AB、AC_1的中点.



(1)证明:$DE \parallel$平面BCC_1B_1;

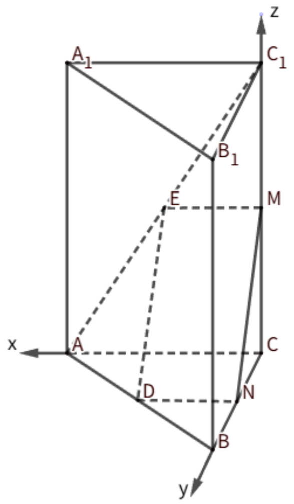
(2)设$CC_1 = 2$,直线DE与平面ACC_1A_1的夹角为$45°$,求DE到平面BCC_1B_1的距离.

【答案】（1）见解析（2）1

【解析】（1）本题考查了线面平行的判定定理.

证明:如图取BC、C_1C的中点N、M,

连DN、NM.



$\because E$为AC_1的中点

$\therefore EM \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}AC$

D为AB的中点

$\therefore DN \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}AC$

$\therefore EM \overset{\parallel}{=} DN$

$\therefore$四边形$EDNM$为平行四边形

$\therefore ED \parallel MN$

$\because MN \subset$面B_1C_1CB

$ED \not\subset$面B_1C_1CB

$\therefore ED \parallel$ 面 B_1C_1CB

(2)考查了线面角,直线到平面的距离、空间向量的应用.

在直三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$中.

$\because AC \perp BC$,

$CC_1 \perp$面ACB,

$\therefore$以C为原点建立空间直角坐标系,

如图所示.

$\because AC = BC$, 设$AC = BC = a$,

$\therefore A(a, 0, 0)$,

$B(0, b, 0)$,

$D\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$,

$C_1(0,0,2)$,

$E\left(\frac{a}{2},0,1\right)$.

$\therefore\overrightarrow{DE}=\left(0,-\frac{a}{2},1\right)$.

易知面A_1C_1CA的法向量

$\overrightarrow{m}=(0,1,0)$.

$\because DE$与面A_1C_1CA所成的角为$45°$

$\therefore\sin 45°=|\cos\langle\overrightarrow{m},\overrightarrow{DE}\rangle|$

$=\left|\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{DE}|}\right|$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}}\Longrightarrow a=2$

$\therefore AC=BC=2.$

$\because ED\parallel$面B_1C_1CB,

$\therefore ED$到面B_1C_1CB的距离即为D到面B_1C_1CB的距离.

$\because DN\overset{\parallel}{=}\frac{1}{2}AC$, $\therefore DN=1.$

$\because AC\perp BC$,

$\therefore DN\perp BC$,

$DN\perp CC_1$, $BC\cap CC_1=C$,

$\therefore DN\perp$面B_1C_1CB, $\therefore ED$到面B_1C_1CB的距离等于1.

16. 在$\triangle ABC$中, 已知$AB=3$, $BC=2\sqrt{3}$, $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求$\cos A$.

(2) 设D, E两点满足: D在BA的延长线上, $DE\parallel BC$, $AE\perp AC$. 若$DE=\sqrt{6}$, 求CE.

【答案】（1）$\frac{1}{3}$（2）$3\sqrt{5}$

【解析】(1)$\because AB=3, BC=2\sqrt{3}$, $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B$

$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\times3\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=9$

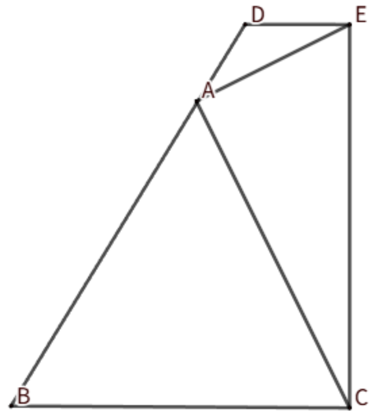
$\therefore AC=3$.

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times3\times3}$

$=\frac{1}{3}$

(2)$\because AE\perp AC$



$\therefore\angle DAE+\angle BAC=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\sin\angle DAE=\cos\angle BAC=\frac{1}{3}$

$\because DE\parallel BC$

$\therefore\angle B+\angle ADE=\pi$

$\therefore\cos\angle ADE=-\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\sin\angle ADE=\sqrt{1-(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

在$\triangle ADE$中,$\dfrac{DE}{\sin\angle DAE}=\dfrac{AE}{\sin\angle ADE}$

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{AE}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$

$\therefore AE=6$

$\therefore CE=\sqrt{AE^2+AC^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

17. 设整数$N\geqslant 2$. 某同学用一个球进行投篮练习, 至多投篮N次, 当且仅当投中 1 次时或N次均未投中时, 停止练习. 设该同学每次投中的概率为$p(0<p<1)$, 各次投中与否相互独立. 记X为停止练习时该同学的投篮次数.

(1) 当$N=4$, $p=\dfrac{1}{3}$时, 求X的分布列;

(2) 设k,m均为自然数.

(i) 当$k\leqslant N-1$时, 求$P(X>k)$;

(ii) 当$k+m\leqslant N-1$时, 证明:$P(X>k+m\mid X>k)=P(X>m)$.

【答案】（1）

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

（2）(i)$(1-p)^k$(ii) 见解析

【解析】本题考查了离散型随机变量的分布列, 条件概率, 相互独立事件的概率.

(1) X的可能取值为$1,2,3,4$

$P(X=1)=\dfrac{1}{3}$

$P(X=2)=(1-\dfrac{1}{3})\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

$P(X=3)=(1-\dfrac{1}{3})^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$

$P(X=4)=(1-\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{8}{27}$

∴X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2)(i)$X>k$表示前k次均未投中

$\therefore P(X>k)=(1-p)^k$

(ii). $P(X>k+m|X>k)=\frac{P[(X>k+m)\cap(X>k)]}{P(X>k)}=\frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}$

$=\frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k}=(1-p)^m$

$=P(X>m)$

18. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F(-1,0)$, 离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求C的方程;

(2)设O为坐标原点,过F且斜率大于0的动直线l与C交于P, Q两点,其中Q在第三象限,直线PO与C的另一个交点为R.

(i)若$\triangle PQR$的面积为$\triangle PFO$的面积的3倍,求l的方程;

(ii)求$\tan\angle PQR$的最小值.

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)(i)$y=\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$

(ii)$4\sqrt{3}$

【解析】本题主要考查椭圆标准方程的求法,直线与椭圆的位置关系,及点到线的距离,基本不等式求最值.

(1)由题意得$c=1$, $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$, $\therefore a=2$, 又$\because b^2=a^2-c^2=3$.

$\therefore C$的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)设直线L的斜率为k, 则$k>0$, $\therefore L: y=k(x+1)$

(i)由$\begin{cases} y=k(x+1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$, 得$(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$

$\because Q$在第三象限, P在第一象限$\therefore x_P=\dfrac{2(-2k^2+3\sqrt{k^2+1})}{3+4k^2}$,

$x_Q=\dfrac{2(-2k^2-3\sqrt{k^2+1})}{3+4k^2}$

由题知R与P关于原点对称,

O到L的距离为$\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$, $\therefore R$到L的距离为$\dfrac{2k}{\sqrt{k^2+1}}$

$\because \dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PFQ}}=\dfrac{2|PQ|}{|PF|}=3 \therefore \dfrac{|PQ|}{|PF|}=\dfrac{3}{2}$, $\therefore |PF|=2|FQ|$,

$\therefore x_P+1=2(-1-x_Q)$

把x_P, x_Q代入化简得$2\sqrt{k^2+1}=3$, 解得$k=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore L$的方程为: $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$

ii)由(1)知

$$k_{QR}=\frac{y_R-y_Q}{x_R-x_Q}=\frac{-y_P-y_Q}{-x_P-x_Q}=\frac{k(x_P+x_Q)+2k}{x_P+x_Q}=k+\frac{2k}{\frac{-8k^2}{3+4k^2}}=-\frac{3}{4k}$$

$$\therefore \tan\angle PQR=\left|\frac{k_{QR}-k}{1+k\cdot k_{QR}}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{4k}-k}{1-\frac{3}{4}}\right|=4k+\frac{3}{k}\geq 4\sqrt{3}$$

当且仅当$4k=\dfrac{3}{k}$, 即$k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$时取等号

$\therefore \tan\angle PQR$的最小值为$4\sqrt{3}$.

19. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbb{R}$, 且当$x<0$时, $f(x)=2^x$. 对于任意$x_0\in\mathbb{R}$, 定义集合$D(x_0)=\{d\in\mathbb{R}\mid f(x_0+d)>f(x_0)\}$.

(1)若当$x\geqslant 0$时, $f(x)=1-x$, 求$D(-1)$;

(2)若$f(x)$是奇函数,$f(x_1) \leq f(x_2)$,且$x_1x_2 \neq 0$,证明:$D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(3)设$f(x)$满足:①若$f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则$D(x_2) \subseteq D(x_1)$;②当$0 < x < 1$时,

$f(x) < f(0)$.

(ⅰ)证明:$f(0) \geqslant 1$;

(ⅱ)证明:$f(x)$在区间$(0, +\infty)$单调递增.

【答案】(1)$D(-1)=\{d \mid 0 < d < \frac{3}{2}\}$(2)见解析

(3)(ⅰ)见解析(ⅱ)见解析

【解析】本题考查了集合与函数的新定义,考查了抽象函数.

函数的单调性,属于压轴难题,对于逻辑推理和抽象思维能力要求极高.

(1)$D(-1)=\{d \in \mathbb{R} \mid f(-1+d) > f(-1)\}$.

由$f(-1+d) > f(-1) \Rightarrow f(-1+d) = \frac{1}{2}$

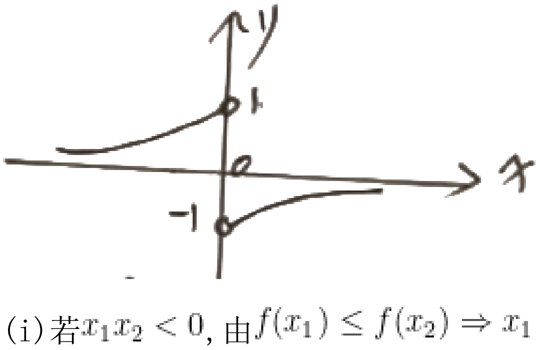
①当$-1+d<0$,即$d<1$时,$f(-1+d)=2^{-1+d} > \frac{1}{2} \Rightarrow -1+d > -1 \Rightarrow d > 0$

此时$0 < d < 1$

②当$-1+d \geq 0$,即$d \geq 1$时,$f(-1+d)=1-|-1+d|=2-d > \frac{1}{2} \Rightarrow d < \frac{3}{2}$

此时$1 \leq d < \frac{3}{2}$,$0 < d < \frac{3}{2}$.即集合$D(-1)=\{d \mid 0 < d < \frac{3}{2}\}$.

(2)$\because f(x)$为奇函数$\therefore x>0$时,$f(x)=-f(-x)=-2^{-x}$,作出$f(x)$的大致图像如图.



(i)若$x_1x_2<0$,由$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow x_1 \leq x_2$,此时

$D(x_1)=\{d \in \mathbb{R} \mid f(x_1+d) > f(x_1)\}$

即$f(x_1+d) > 2^{x_1}$,$\therefore x_1+d<0 \Rightarrow d<-x_1$,且$2^{x_1+d} > 2^{x_1} \Rightarrow d > 0$

$\therefore 0 < d < -x_1$,

$D(x_1) = (0, -x_1)$

同理$D(x_2) = (0, -x_2)$

$\because x_1 \leq x_2, \therefore -x_1 \geq -x_2. \therefore D(x_2) \subseteq D(x_1)$

若$x_1, x_2 > 0$同理得出.

若$x_1 > 0, x_2 < 0$, 则此时

$D(x_1) = \{d \in \mathbb{R} \mid f(x_1 + d) > f(x_1)\} \Rightarrow f(x_1 + d) > -2^{-x_1}$

若$x_1 + d > 0$, 即$-2^{-x_1-d} > -2^{-x_1} \Rightarrow d > 0$, 此时$d > 0$或$d < -x_1$

由$D(x_2) \Rightarrow f(x_2 + d) > f(x_2) = 2^{x_2}$,

$\therefore x_2 + d < 0 \Rightarrow d < -x_2$且$2^{x_2+d} > 2^{x_2} \Rightarrow 0 < d < -x_2$

$\therefore D(x_2) = (0, -x_2) \subseteq D(x_1) = (-\infty, -x_1) \cup (0, +\infty)$

综上:$D(x_2) \subseteq D(x_1)$

(3) (i) 若$f(0) < 1$, 则$\exists x_0 \in (-2, 0), f(x_0) > f(0)$

$D(x_0) \subseteq D(0)$

$D(\frac{x_0}{2}) > D(x_0). \therefore -\frac{x_0}{2} \in D(x_0)$

$-\frac{x_0}{2} \in (0, 1)$与$\forall x \in (0, 1), f(x_0) < f(0)$矛盾

$\therefore f(0) \geqslant 1$

(ii) $\exists x_1 \in (0, 1), f(x_1) > 0$

则$\exists x_2 \in (-\infty, 0)\ f(x_2) < f(x_1) < f(0)$

$\therefore -x_1 \in D(x_1) \subseteq D(x_2)$

$\therefore f(x_2 - x_1) > f(x_2)$与$2^x$为增函数矛盾

$\therefore \forall x \in (0, 1), f(x) \leqslant 0$

若$\exists x_3 \in (0, +\infty), f(x_3) > 0$则$x_3 \in [1, +\infty)$

$\exists x_4 \in (-\infty, 0), f(x_4) < f(x_3)$

$\therefore x_3 - x_4 \in D(x_4)$

$x_3 - x_4 > 1$, 取$0 < t < 1 \leq x_3$

$t-(x_3-x_4)=x_4+(t-x_3)<x_4<0$

$0<f(t-(x_3-x_4))<f(x_4)$

$D(x_4)\subseteq D(t-(x_3-x_4))$

$\therefore x_3-x_4\in D(t-(x_5-x_4))$

$\therefore f(t)>f(t-(x_3-x_4))>0$

而$t\in(0,1),f(x)\leq 0$矛盾.

$\therefore \forall x\in(0,+\infty),f(x)\leq 0$

$\therefore$取$0<x_5<x_6$

$\because f(x_5)\leq 0<f(-(x_6-x_5))<f(0)$

$\therefore x_6-x_5\in D(-(x_6-x_5))\subseteq f(x_5)$

$\therefore x_6-x_5\in f(x_5)$

$f(x_6)>f(x_5)$

$\therefore x\in(0,+\infty)f(x)$单增.